Une perturbation des operateurs microhypoelliptiques

著者	Morioka Tatsushi
雑誌名	Tsukuba journal of mathematics
巻	22
号	2
ページ	537-550
発行年	1998-10
URL	http://hdl.handle.net/2241/100584

TSUKUBA J. MATH.
Vol. 22 No. 2 (1998), 537–550

UNE PERTURBATION DES OPÉRATEURS MICROHYPOELLIPTIQUES

par

Tatsushi MORIOKA

§ 1. Introduction et Résultat

Nous généralisons le résultat de Hoshiro [6] et de Morioka [13] en tenant compte de celui de Wakabayashi–Suzuki [15].

Soit $n \geqq 3$ et $2 \leqq k \leqq n-1$. Pour $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, on note $x''=(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \boldsymbol{R}^{k-1}$ et $x'=(x'', x_n) \in \boldsymbol{R}^k$. Soit $A=a(x'', D')$ l'opérateur différentiel d'ordre 2 dans $\boldsymbol{R}_x^n$, dont le polynôme $a(x, \xi)$ ne dépend que de x'' et de ξ'. On note $\tilde{A}$ au lieu de A, lorsque on considère A comme l'opérateur dans $\boldsymbol{R}^k$. Soit $B=\sum_{j=k}^{n-1} L_j^* L_j$, où $L_j=D_j-i x_j D_n$. On définit alors P par $P=A+B$. Soit $\rho \in T^* \boldsymbol{R}^n \backslash 0$; $\rho=(y, \eta) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \backslash 0$, $|\eta|=1$, $y_k=\cdots=y_{n-1}=0$, $\eta_k=\cdots=\eta_{n-1}=0$ et $\eta_n>0$. On définit $\tilde{\rho} \in T^* \boldsymbol{R}^k \backslash 0$ par $\tilde{\rho}=(y', \eta')$. On décrit la norme et la multiplication intérieure dans L^2 par $\| * \|$ et par $(\ ,\ )$. Quant à A, on suppose les hypothèses suivantes.

(H.1) La partie principale de $a(x'', \xi')$ n'est pas négative.

(H.2) Il existe un voisinage conique $\Sigma \subset \boldsymbol{R}^k$ de η' et une constante $C>0$ tels que pour tout $v \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^k)$; supp $\hat{v} \subset \Sigma$ on a $\operatorname{Re}(\tilde{A} v, v) \geqq -C\|v\|^2$.

Le théorème suivant est notre résultat principal. On dit que l'opérateur différentiel Q dans $\boldsymbol{R}^n$ est microhypoelliptique à $\rho \in T^* \boldsymbol{R}^n \backslash 0$ si $u \in \mathscr{D}'$ et $\rho \notin WF(Qu)$ implique $\rho \notin WFu$. Pour la définition de WF, on cite Hörmander [4, Définition 8.1.2].

THÉORÈME 1. *On suppose que* (H.1) *et* (H.2) *sont vérifiées. Alors, P est microhypoelliptique à ρ si et seulement si $\tilde{A}$ est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$.*

On considère maintenant B comme la perturbation de A. Selon Théorème 1, la perturbation B conserve la microhypoellipticité de A à ρ sous la condition (H.1) et (H.2). En effet, $\tilde{A}$ est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ si A est microhypoelliptique à ρ.

Received May 8, 1997
Revised December 3, 1997

Nous écrivons alors notre motivation. Hoshiro [6] a étudié l'hypoellipticité de l'opérateur

$$P_0 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + x_3^2 D_4^2 + (g(x_1) - 1)D_4 \quad \text{dans } \boldsymbol{R}^4.$$

Ici, $D_j = -i\partial/\partial x_j$. On suppose que $0 < g(t) \leqq 1$ quand $t \neq 0$ et que $tg'(t) \geqq 0$. Alors, [6] a montré que P_0 etait hypoelliptique si et seulement si $(*)$ $\lim_{t\to 0} t \log g(t) = 0$ etait vérifiée. En revanche, [6] a aussi annoncé que l'opérateur

$$P_1 = D_1^2 + D_2^2 + x_2^2 D_3^2 + (g(x_1) - 1)D_3 \quad \text{dans } \boldsymbol{R}^3$$

est hypoelliptique si $0 < g(t) \leqq 1$ quand $t \neq 0$. Notons que $(*)$ n'est pas nécessaire pour l'hypoellipticité de P_1. Cette différence provient du fait suivant. Soit $A_0 = D_1^2 + D_2^2 + g(x_1)D_4$ dans $\boldsymbol{R}^3$ et $A_1 = D_1^2 + g(x_1)D_3$ dans $\boldsymbol{R}^2$. On suppose que $0 < g(t) \leqq 1$ quand $t \neq 0$ et que $tg'(t) \geqq 0$. Soit $\rho = (\boldsymbol{O}; 0, 0, 1) \in T^*\boldsymbol{R}^3\backslash 0$ et $\tilde{\rho} = (\boldsymbol{O}; 0, 1) \in T^*\boldsymbol{R}^2\backslash 0$, où $\boldsymbol{O}$ est origine. Alors, A_0 est microhypoelliptique à ρ si et seulement si $(*)$ est vérifiée. En revanche, A_1 est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ sans $(*)$. Ces faits sont essentiellement déduits par Morimoto [9] ou par Hoshiro [5]. On cite aussi Fediĭ [2] et Kusuoka–Stroock [8], qui concernent respectivement A_0 et A_1. Selon [6], chaque A_k apparait lorsque l'on prend la projection de chaque P_k sur le premier espace propre de l'opérateur de Hermite. Alors, l'hypoellipticité de P_k est déduite par la microhypoellipticité de A_k. Donc, on n'a pas besoin de $(*)$ pour l'hypoellipticité de P_1.

L'idée de [6] provient de Boutet de Monvel [1] et de Grigis [3], qui ont construit des paramétrix des opérateurs différentiels à caractéristiques doubles.

Wakabayashi–Suzuki [15, Exemple 5.2] a aussi prouvé l'hypoellipticité de P_0 en utilisant l'idée différente. Soit $B = L^*L$, où $L = D_3 - ix_3D_4$. Alors, $P_0 = A_0 + B$ et $B \geqq 0$. Selon la condition $(*)$, comme Morimoto [9] a étudié, A_1 vérifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4)$; $\operatorname{supp} \hat{u} \subset \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4,) \in \boldsymbol{R}^4 : \xi_4 > 0\}$ on a

$$\|\log\langle D_4\rangle u\|^2 \leqq \varepsilon(A_0 u, u) + C\|u\|^2. \tag{0.1}$$

Ici, $\mathscr{S}$ est espace des distributions à décroissance rapide et $\hat{u}$ est la transformé de Fourier de u. Puisque $P_0 = A_0 + B$ et $B \geqq 0$, P_0 vérifie aussi (0.1). Alors, l'argument de [9] nous révèle que P_0 est microhypoelliptique à ρ. On peut dire que [15, Exemple 5.2] a générarisé ce processus. Cependant, si on applique [15, Exemple 5.2] à P_1, il faut supposer $(*)$ pour prouver que P_1 est microhypoelliptique à ρ. Donc, l'idée de [15, Exemple 5.2] ne fonctionne pas bien afin de préciser l'hypoellipticité de P_1.

Morioka [13] a étudié l'hypoellipticité de l'opérateur

$$P_2 = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + D_3^2 + x_3^2 D_4^2 + (g(x_1) - 1)D_4 \quad \text{dans } \mathbf{R}^4.$$

Fixons une intervalle ouverte $I_0 \subset \mathbf{R}$. On dit que une fonction g vérifie (A.1) si

(A.1) $g_I > 0$ pour toutes les intervalles $I \subset I_0$.

Ici, $g_I = |I|^{-1} \int_I g$. On dit que des fonctions f, g vérifient $(M;f,g)$ si

$$\text{(M;f,g)} \qquad \inf_{\delta > 0} \sup\{(f_I)^{1/2}|I|\,|\log g_{3I}| : 3I \subset I_0, \quad g_{3I} < \delta\} = 0.$$

Ici, $3I$ représente l'intervalle dont le centre est commun à celui de I et dont la langeur est trois frois plus grande que celle de I. On suppose maintenant (A.1), que f, $g > 0$ sur ∂I_0 et que $g \leqq 1$. Alors, [13] a prouvé que P_2 etait hypoelliptique si et seulement si $(M;1,f)$ et $(M;f,g)$ etaient vérifiées.

La condition $(M;f,g)$ provient de Sawyer [14, Remarque 5], qui a caractérisé la positivité des opérateurs de Schrödinger à une dimension. On cite aussi [11, Sawyer's Lemma].

Comme [13, § 1] a mentionné l'hypoellipticité de P_2 ne peut pas être précisée par [15, Exemple 5.2]. En revanche, Théorème 1 explique simultanément l'hypoellipticité de P_0, P_1 et de P_2. Par surcroît, on obtient le corollaire suivant, si on applique théorème 1 à P_2. Soit $\rho \in T^*\mathbf{R}^4 \backslash 0$; $\rho = (y;\eta) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \backslash 0$, $y = (y_1, 0, 0, 0)$, $\eta = (0, 0, 0, 1)$ et $y_1 \in I_0$.

Corollaire 2. *On suppose* (A.1) *et que* f, $g > 0$ *sur* ∂I_0. *Alors,* P_2 *est microhypoelliptique à* ρ *pour tout* $y_1 \in I_0$ *si et seulement si* $(M;f,g)$ *est vérifiée.*

Démonstration de Corollaire 2. Soit $A_2 = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + g(x_1)D_4$ dans $\mathbf{R}^3$. Selon Théorème 1, la microhypoellipticité de P_2 à ρ équivaut à celle de $\tilde{A}_2$ à $\tilde{\rho}$. Ici, $\tilde{\rho} = (y_1, 0, 0, ; 0, 0, 1)$. Par surcroît, la démonstration de [11, Théorème 1] nous laisse savoir que $\tilde{A}_2$ est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ pour tout $y_1 \in I_0$ si et seulement si $(M;f,g)$ est vérifiée. Donc, on obtient la conclusion. $\square$

Quant à la relation entre [13] et cet article, corollaire 2 est nouveau. En effet, la preuve de l'hypoellipticié de P_2 faite dans [13] nous laisse savoir que P_2 est microhypoelliptique à ρ pour tout $y_1 \in I_0$, sous la condition $(M;1,f)$ et $(M;f,g)$. Selon la méthode de [13], $(M;1,f)$ est indispensable. En revanche, corollaire 2 montre microhypoellipticié de P_2 sans $(M;1,f)$.

Nous écrivons la différence entre la méthode de [13] et celle de cet article. Soit Π_0 la projection sur le premier espace propre de l'opérateur de Hermite. La définition précise de Π_0 sera donnée à §2. Soit $P = P_2$ et $P = P\Pi_0 + R$. Alors, la microhypoellipticité de P à ρ est déduite par celle de $P\Pi_0$ et de R. On obtient la microhypoellipticité de $P\Pi_0$ à ρ par [11, Théorème 1], car on peut considérer $P\Pi_0$ comme A_2 mentionné dans la preuve de Corollaire 2. Voiyez Lemme 2.2 à §2. Dans [13], en poursuivant le technique de Hoshiro [6], nous avons construit le parametrix de R au domaine où $|\xi_4|$ domine $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ en $\boldsymbol{R}^n_\xi$. Puisque D_2^2 dégénére, on ne peut pas avoir parametrix de R dans le cône ordinaire où $|\xi_4|$ est dominant. Voiyez [13, §6]. Donc, la microhypoellipticié de P_2 à ρ ne peut pas être déduite sans $(M; 1, f)$, si on adapte le technique de [6] et de [13]. En revanche, nous utilisons dans cet article la méthode de énergie pour prouver la microhypoellipticité de R à ρ. Grâce à cette méthode, nous pouvons déduire la microhypoellipticité de R sans $(M; 1, f)$.

Nous remarquons le fait suivant. Soit $k = n-1$ à Théorème 1. Alors, $B = L_{n-1}^* L_{n-1}$. Si on remplace L_{n-1} par D_{n-1}, Théorème 1 est faux, malgré que $B \geqq 0$. On donne un exemple. Soit A_0, A_1 l'opérateur mentionnés précédemment. Alors, $A_0 = A_1 + D_2^2$ dans $\boldsymbol{R}^3$. On suppose que $g(t) = \exp(-|t|^{-\sigma})$; $\sigma > 0$. Soit $\rho = (O; 0, 0, 1) \in T^*\boldsymbol{R}^3 \backslash 0$ et $\tilde{\rho} = (O; 0, 1) \in T^*\boldsymbol{R}^2 \backslash 0$. A_0 est microhypoelliptique à ρ si et seulement si $\sigma < 1$. En revanche, A_1 est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ pour tout $\sigma > 0$. Donc, la perturbation D_2^2 ne conserve pas la microhypoellipticité de A_1. Quant à cet argument, on cite Morimoto [10].

Théorème 1 est déduit par la propriété de l'opérateur de Hermite. Nous l'étudierons à §2 en poursuivant [6, §2] et [13, §4]. La preuve de Théorème 1 sera donnée à §3.

§2. Opérateur de Hermite

Nous étudions la propriété de l'opérateur de Hermite, $L = -(d/dt)^2 + t^2$, qui jouera un rôle principal dans la démonstration de Théorème 1.

La j-ème fonction propre de l'opérateur de Hermite est

$$h_j(t) = \pi^{-1/4}(2^j j!)^{-1/2}\left(\frac{d}{dt} - t\right)^j \exp(-t^2/2). \tag{2.1}$$

On définit $\varphi_j(t; \eta)$ par $\varphi_j(t; \eta) = |\eta|^{1/4} h_j(t|\eta|^{1/2})$. Alors, $\varphi_j(t; \eta)$ est la j-ème fonction propre de l'opérateur de Hermite à paramétre $\eta : L_\eta = -(d/dt)^2 + t^2\eta^2$. En effet, on a $L_\eta \varphi_j(t; \eta) = (2j+1)|\eta|\varphi_j(t; \eta)$ et $\|\varphi_j\| = 1$.

Soit $k = n-1$. Alors, $x'' = (x_1, \dots, x_{n-2})$ et $x' = (x'', x_n)$. Soit $\phi(\eta) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, $0 \leqq \phi \leqq 1$, $\phi(\eta) = 1$ lorsque $|\eta| \geqq 2$ et $\phi(\eta) = 0$ lorsque $|\eta| \leqq 1$. On définit $H_j : \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^{n-1}) \to \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ par

$$(2.2) \qquad (H_j v)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix_n\xi_n} \phi(\xi_n)\varphi_j(x_{n-1};\xi_n)\hat{v}(x'';\xi_n)\,d\xi_n$$

où $\hat{v}$ est la transformé de Fourier de $v(x)$ par rapport à x_n. On définit $H_j^* : \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n) \to \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^{n-1})$, qui est adjoint de H_j, par

$$(2.3) \qquad (H_j^* u)(x') = (2\pi)^{-1/2} \iint e^{ix_n\xi_n} \phi(\xi_n)\varphi_j(y;\xi_n)\hat{u}(x'',y;\xi_n)\,dy\,d\xi_n.$$

On peut aussi définir $H_j : \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n-1}) \to \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ et $H_j^* : \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n) \to \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n-1})$ à partir de (2.2) et de (2.3) en utilisant la relation $(H_j v, u) = (v, H_j^* u)$ pour $v \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^{n-1})$, $u \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$. Ici $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ représente l'espace des distributions tempérées. On définit $\Pi_j : \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n) \to \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ par $\Pi_j = H_j H_j^*$.

On décrit la proposition suivante, qui représente une idée principale dans la preuve de Théorème 1.

Proposition 2.1.

(i) *Pour tout* $u \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ on a

$$(2.4) \qquad (\Pi_0 u)(x) = \int e^{ix\xi} \sigma(\Pi_0)(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi,$$

où $\sigma(\Pi_0)(x,\xi) = \phi(\xi_n)^2 exp(-ix_{n-1}\xi_{n-1} - (\xi_{n-1}^2 + x_{n-1}^2\xi_n^2)/(2|\xi_n|)$.

Par surcroît, pour tout α, β *il existe une constante* $C_{\alpha,\beta}$ *telle que pour tout* $(x,\xi) \in \boldsymbol{R}^{2n}$ *on a*

$$(2.5) \qquad |\sigma(\Pi_0)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\langle \xi_{n-1}, \xi_n\rangle^{-\alpha_{n-1}/2-\alpha_n+\beta_{n-1}/2},$$

où $\langle t\rangle = (1+|t|^2)^{1/2}$ *et* $r^{(\alpha)}_{(\beta)} = \partial_\xi^\alpha D_x^\beta r$.

(ii) *Pour tout* $u \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, *on a* $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j u = \phi(D_n)^2 u$ *dans* $L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

(iii) *Pour tout* j, k, *on a* $H_j^* H_k = \delta_{jk}\phi(D_n)^2$ *dans* $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n-1})$.

(iv) *Soit* $B = D_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 D_n^2 - D_n$ *et* $B_j = 2jD_n$. *Alors, on a* $BH_j v = H_j B_j v$ *pour* $v \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n-1})$; *supp* $\hat{v} \subset \{\xi' \in \boldsymbol{R}^{n-1} : \xi_n > 0\}$ *et* $H_j^* Bu = B_j H_j^* u$ *pour* $u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$; *supp* $\hat{u} \subset \{\xi \in \boldsymbol{R}^n : \xi_n > 0\}$.

(v) *Pour* $(x',\xi') \in T^*\boldsymbol{R}^{n-1}$, *on définit* $J(x',\xi') \in T^*\boldsymbol{R}^n$ *par*

$$J(x',\xi') = (x'',0,x_n;\xi'',0,\xi_n).$$

Alors, pour tout $u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ *et tout* $v \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n-1})$ *on a*

$$WF(H_0 v) \subset \{J(x',\xi') \in T^*\boldsymbol{R}^n\backslash 0 : (x',\xi') \in WFv\},$$

$$WF(H_0^* u) \subset \{(x',\xi') \in T^*\boldsymbol{R}^{n-1}\backslash 0 : J(x',\xi') \in WFu\}.$$

DÉMONSTRATION DE PROPOSITION 2.1.

(i) Notons que $\widehat{h_0}(t) = h_0(t)$. Alors, on peut obtenir les conclusions à partir de (2.2) et de (2.3).

(ii) On définit l'opérateur $T : L^2(\boldsymbol{R}^n) \to L^2(\boldsymbol{R}^n)$ par

$$(Tu)(x) = (2\pi)^{-1} \int \exp(ix_n\xi_n)|\xi_n|^{1/4}\hat{u}(x'', |\xi_n|^{1/2}x_{n-1}, \xi_n)\, d\xi_n. \tag{2.6}$$

Alors, on a $T^*T = TT^* = I$. Ici, I est opérateur identique. On suppose que

$$\widehat{T^*u}(x'', x_{n-1}, \xi_n) = f(x'')g(x_{n-1})r(\xi_n), \tag{2.7}$$

où $f \in L^2(\boldsymbol{R}^{n-2})$ et g, $r \in L^2(\boldsymbol{R})$. Alors, on a

$$\hat{u}(x'', x_{n-1}, \xi_n) = f(x'')|\xi_n|^{1/4}g(x_{n-1}|\xi_n|^{1/2})r(\xi_n). \tag{2.8}$$

Puisque $\{h_j\}_{j=0}^{\infty}$ est C.O.N.S. dans $L^2(\boldsymbol{R})$, on a $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j u = \phi(D_n)^2 u$ dans $L^2(\boldsymbol{R})$. Puisque $L^2(\boldsymbol{R}^n) = L^2(\boldsymbol{R}^{n-2}) \otimes L^2(\boldsymbol{R}) \otimes L^2(\boldsymbol{R})$, on obtient la conclusion.

(iii), (iv) Puisque $\{h_j\}_{j=0}^{\infty}$ est C.O.N.S. dans $L^2(\boldsymbol{R})$ et $(L_\eta\varphi_j)(t, \eta) = (2j+1)|\eta|\varphi_j(t, \eta)$, on obtient les conclusions.

(v) Soit $K_1 \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}_x^n \times \boldsymbol{R}_{y'}^{n-1})$ et $K_2 \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}_{x'}^{n-1} \times \boldsymbol{R}_y^n)$ les noyaus de H_0 et de H_0^*, i.e.,

$$(H_0 v)(x) = \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} K_1(x, y')v(y')\, dy' \quad \text{et} \quad (H_0^* u)(x') = \int_{\boldsymbol{R}^n} K_2(x', y)u(y)\, dy.$$

Selon (2.2) et (2.3), on a

$$K_1(x, y') = \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} \exp(i\psi_1(x, y'; \theta'))|\theta_n|^{1/4}\phi(\theta_n)\, d\theta'$$

$$K_2(x', y) = \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} \exp(i\psi_2(x', y; \theta'))|\theta_n|^{1/4}\phi(\theta_n)\, d\theta',$$

où $\psi_1(x, y'; \theta') = (x' - y') \cdot \theta' + ix_{n-1}^2|\theta_n|/2$ et $\psi_2(x', y\ \theta') = (x' - y') \cdot \theta' + iy_{n-1}^2|\theta_n|/2$. Ici, $\theta' = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \theta_n)$. Selon Hörmander [4. Théorème 8.1.9], on a

$$WFK_1 \subset \{(x, y'; \xi, \eta') : x' = y', \quad x_{n-1} = 0, \quad \xi' = -\eta', \quad \xi_{n-1} = 0\},$$

$$WFK_2 \subset \{(x', y; \xi', \eta) : x' = y', \quad y_{n-1} = 0, \quad \xi' = -\eta', \quad \eta_{n-1} = 0\}.$$

Selon Hörmander [4. Théorème 8.2.13], on obtient la conclusion. □

Quant à Proposition 2.1, on cite Grigis [3, Section III.3] et Hoshiro [6, Proposition 1].

On étudie maintenant la relation entre P et $\tilde{A}$ dans Théorème 1 sous la condition $k = n - 1$. Alors, $P = A + B$ et $B = L_{n-1}^* L_{n-1}$. Notons que ce B coincide à celui qui a été mentionné dans Proposition 2.1–(iv).

Lemme 2.2. *$PH_0 v = H_0 \tilde{A} v$ pour $v \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n-1})$; supp $\hat{v} \subset \{\xi' \in \boldsymbol{R}^{n-1} : \xi_n > 0\}$ et $H_0^* P u = \tilde{A} H_0^* u$ pour $u \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$; supp $\hat{u} \subset \{\xi \in \boldsymbol{R}^n : \xi_n > 0\}$.*

Démonstration de Lemme 2.2. Selon Proposition 2.1–(iv), on a $H_0 B v = 0$ et $BH_0^* u = 0$. Puisque $P = A + B$, on obtient la conclusion. $\square$

§ 3. Démonstration de Théorème 1

Nous prouvons Théorème 1 sous la condition $k = n - 1$. La démonstration au cas où $k \leqq n - 2$ est-elle déduite par la répétition.

On explique les notations. Pour les ensembles ouverts U_1, $U_2 \subset \boldsymbol{R}^m$ qui vérifient $U_1 \Subset U_2$, on définit $Y(U_1, U_2)$ par

$$Y(U_1, U_2) = \{\varphi \in C_0^\infty(U_2) : 0 \leqq \varphi \leqq 1, \quad \varphi(t) = 1 \text{ si } t \in U_1\}.$$

Pour les cônes ouverts Γ_1, $\Gamma_2 \subset \boldsymbol{R}^m$ qui vérifient $\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$, on définit $Z(\Gamma_1, \Gamma_2)$, qui est ensemble des symboles des opérateurs pseudodifférentiels, par

$$Z(\Gamma_1, \Gamma_2) = \{\gamma(\xi) \in S_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^m) : 0 \leqq \gamma \leq 1, \operatorname{supp} \gamma \subset \Gamma_2 \text{ et } \gamma(\tau) = 1 \text{ si } \tau \in \Gamma_1, |\tau| \geqq 1\}.$$

Pour les notations qui concernent des opérateurs pseudodifférentiels, nous suivons Kumano-go [7].

D'abord, on suppose que P est microhypoelliptique à ρ et on montre que $\tilde{A}$ est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$.

Soit $v \in \mathscr{E}'(\boldsymbol{R}^{n-1})$, i.e., supp v est compact et on suppose que $\tilde{\rho} \notin WF(\tilde{A}v)$. On fixe une fonction $\psi(\xi_n) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$; $0 \leqq \psi \leqq 1$, $\psi(\xi_n) = 0$ lorsque $|\xi_n| \leqq 1$ et $\psi(\xi_n) = 1$ lorsque $|\xi_n| \geqq 2$. On définit w par $w = \psi(D_n)v$. Alors, on a $\tilde{\rho} \notin WF(\tilde{A}w)$. Ici, on a utilisé le fait que $[\tilde{A}, \psi(D_n)] = 0$. Selon Proposition 2.1–(v), on a $\rho \notin WF(H_0 \tilde{A} w)$. Selon Lemme 2.2, on a $\rho \notin WF(P(H_0 w))$. Puisque P est microhypoelliptique à ρ, on obtient $\rho \notin WF(H_0 w)$. Selon Proposition 2.1–(v), $\tilde{\rho} \notin WF(H_0^* H_0 w)$. Selon Proposition 2.1–(iii), $H_0^* H_0 w = \phi(D_n)^2 w$. Donc, on obtient la conclusion.

Nous prouvons le cas contraire. On suppose que $\tilde{A}$ est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ et on montre que P est microhypoelliptique à ρ. Soit $u \in \mathscr{E}'(\boldsymbol{R}^n)$ et $\rho \notin WF(Pu)$. Quant au cône Σ mentionné dans Théorème 1, on peut supposer que $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans Σ. On définit alors $\Sigma^* \subset \boldsymbol{R}^n$ par $\Sigma^* = \{\xi \in \boldsymbol{R}^n : \xi' \in \Sigma, \xi_{n-1} \in \boldsymbol{R}\}$. On fixe Σ_0

et Σ_1 qui sont les voisinages coniques de η et qui vérifient $\Sigma_0 \Subset \Sigma_1 \Subset \Sigma^*$. On fixe aussi $\lambda \in Z(\Sigma_0, \Sigma_1)$ et on définit w par $w = \lambda(D)u$.

LEMME 3.1. *On a* $\rho \notin WF(Pw)$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.1. Puisque $w = \lambda(D)u$, on a

$$Pw = \lambda(D)Pu - [\lambda(D), P]u.$$

Puisque $\rho \notin WF(Pu)$, on a $\rho \notin WF(\lambda(D)Pu)$. Observons que

$$[\lambda(D), P] = \sum_{|\alpha|=1}^{N} P_{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)}(D)/\alpha! + R_N,$$

où $R_N \in OPS_{1,0}^{2-N}(\boldsymbol{R}^n)$. Puisque $\lambda^{(\alpha)}(\xi) = 0$ sur $\Sigma_0 \cap \{|\xi| > 1\}$ si $|\alpha| \geqq 1$, on a $\rho \notin WF(P_{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)}(D)u)$. Donc, on obtient la conclusion. □

On prend alors l'expansion de w par rapport aux fonctions propres de l'opérateur de Hermite.

LEMME 3.2. $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j w = \phi(D_n)^2 w$ *dans* $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.2. Puisque supp $\hat{w} \subset \Sigma_1$ et $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans Σ_1, il existe $s > 0$ telle que $\langle D_n \rangle^{-s} w \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Selon Proposition 2.1–(ii), on a $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j(\langle D_n \rangle^{-s} w) = \phi(D_n)^2 \langle D_n \rangle^{-s} w$ dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Puisque $[\Pi_j, \langle D_n \rangle^{-s}] = 0$ dans $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$, on obtient la conclusion. □

On définit maintenant w_0 et w_* par $w_0 = \Pi_0 w$ et $w_* = \phi(D_n)^2 w - w_0$. On montre que $\rho \notin WFw_0$ et que $\rho \notin WFw^*$, qui achèvent la démonstration de Théorème 1.

D'abord, on prouve que $\rho \notin WFw_0$. Selon Proposition 2.1–(v) et Lemme 3.1, on a $\tilde{\rho} \notin WF(H_0^* Pw)$. Selon Lemme 2.2, on a $\tilde{\rho} \notin WF(\tilde{A}(H_0^* w))$. Puisque $\tilde{A}$ est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$, on a $\tilde{\rho} \notin WF(H_0^* w)$. Selon Proposition 2.1–(v), on obtient $\rho \notin WFw_0$.

On montre maintenant que $\rho \notin WFw_*$. Les deux propositions suivantes sont la clée à ce prouver.

PROPOSITION 3.3. *Soit* $\rho_0 = (y^0, \eta^0) \in T^*\boldsymbol{R}^n \backslash 0$ *et* $\eta^0 \in \Sigma^*$.
(i) *Si* $y_{n-1}^0 \neq 0$, *P est microhypoelliptique à* ρ_0.
(ii) *Si* $\eta_{n-1}^0 \neq 0$, *P est microhypoelliptique à* ρ_0.

Démonstration de Proposition 3.3. Puisque $B = L_{n-1}^* L_{n-1}$ est microlocalement elliptique au voisinage de ρ_0 si $y_{n-1}^0 \neq 0$ ou $\eta_{n-1}^0 \neq 0$, on obtient les conclusions en tenant compte de (H.1). □

On choisit un cône $\Sigma' \subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ tel que $\Sigma \Subset \Sigma'$ et que $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi' \rangle$ dans Σ'. On fixe alors $\lambda_0(\xi') \in Z(\Sigma, \Sigma')$. On définit K et Q par $K = D_n \Pi_0 \lambda_0(D')$ et par $Q = P + K$ dans $\boldsymbol{R}^n$. Bien que $\lambda_0(D') \in OPS_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^{n-1})$, on le considère comme un opérateur dans $\boldsymbol{R}^n$.

Proposition 3.4.

(i) $K \in OPS_{1/2,1/2}^1(\boldsymbol{R}^n)$. *Par surcroît, pour tout* α, β *il existe une constante* $C_{\alpha,\beta}$ *telle que pout tout* $(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{2n}$ *on a*

$$|\sigma(K)_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leqq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha''| - (\alpha_{n-1}/2) - \alpha_n + (\beta_{n-1}/2)}. \tag{3.1}$$

Ici, $\alpha'' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})$.

(ii) $P w_* = Q w_*$.

(iii) *Il existe les constantes* C_1, $C_2 > 0$ *telles que pour tout* $u \in H^2(\boldsymbol{R}^n)$; *supp* $\hat{u} \subset \Sigma^*$, *on a*

$$\|\langle D_n \rangle^{1/2} u\|^2 \leqq C_1 Re(Qu, u) + C_2 \|u\|^2.$$

Démonstration de Proposition 3.4.

(i) Selon Proposition 2.1–(i) et la définition de K, on obtient la conclusion.

(ii) Selon Lemme 3.2, $w_* = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j w$ dans $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$. Donc, on a $\Pi_0 w_* = 0$ en tenant compte de Proposition 2.1–(iii). Puisque $[\Pi_0, \lambda_0(D')] = 0$, on obtient la conclusion.

(iii) Soit $v \in H^2(\boldsymbol{R}^{n-1})$; supp $v \subset \Sigma$. Alors, pour tout $j \geqq 1$ on a

$$\| \, |D_n|^{1/2} v\|^2 \leqq (B_j v, v), \tag{3.2}$$

où $B_j = 2jD_n$. Soit $u \in H^2(\boldsymbol{R}^n)$; supp $u \subset \Sigma^*$. Alors, on a supp $\widehat{H_j^* u} \subset \Sigma$. Puisque $\langle D_n \rangle^2 u \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, on a $H_j^* \langle D_n \rangle^2 u \in L^2(\boldsymbol{R}^{n-1})$. Puisque $H_j^* \langle D_n \rangle^2 u = \langle D_n \rangle^2 H_j^* u$ et $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi' \rangle$ dans Σ, on a $H_j^* u \in H^2(\boldsymbol{R}^{n-1})$. Donc, en remplaçant v par $H_j^* u$ dans (3.2), on a

$$\| \, |D_n|^{1/2} H_j^* u\|^2 \leqq (B_j H_j^* u, H_j^* u). \tag{3.3}$$

Selon Proposition 2.1–(iv), on a

$$(\Pi_j |D_n| u, u) \leqq (\Pi_j B u, u). \tag{3.4}$$

Prenons le somme de chaque côté de (3.4) de $j=1$ à $j=\infty$. Selon Proposition 2.1–(ii), on a

$$(3.5) \qquad (|D_n|u,u)-(Ku,u)\leqq(Bu,u),$$

car $u\in H^2(\boldsymbol{R}^2)$, $\Pi_0 B=0$ et $\lambda_0(D')u=u$. Selon l'hypothèse (H.1), on a

$$(3.6) \qquad \mathrm{Re}(Au,u)\geqq -C\|u\|^2.$$

À partir de (3.5) et de (3.6), on obtient la conclusion. □

On déduit alors $\rho\notin WFw_*$. Puisque $[P,\phi(D_n)^2]=0$, on a $Pw_*=\phi(D_n)^2Pw-Pw_0$. Puisque $\rho\notin WF(Pw)$ et $\rho\notin WFw_0$, on a $\rho\notin WF(Pw_*)$. Selon Proposition 3.4–(ii), on a $\rho\notin WF(Qw_*)$. Donc, il existe un cône ouvert $\Gamma_0\subset\boldsymbol{R}^n$ qui contient η et qui vérifie $\Gamma_0\Subset\Sigma^*$, un ensemble ouvert $V_0\subset\boldsymbol{R}^{n-1}$ qui contient y' et une intervalle ouverte $I_0\subset\boldsymbol{R}$ qui contient 0 tels que pour tout $\gamma(\xi)\in S^0_{1,0}(\boldsymbol{R}^n)$; $\operatorname{supp}\gamma\subset\Gamma_0$, tout $\psi(x')\in C_0^\infty(V_0)$ et tout $\chi(x_{n-1})\in C_0^\infty(I_0)$ on a $\psi(x')\chi(x_{n-1})\gamma(D)Qw_*\in H^\infty$. À partir de ces V_0, I_0 et Γ_0, on considère des séquences comme ci-dessous. On choisit une séquence des ensembles ouverts $\{V_k\}_{k=0}^\infty\cup\{V\}\subset\boldsymbol{R}^{n-1}$ et celle des intervalles ouvertes $\{I_k\}_{k=0}^\infty\cup\{I\}\subset\boldsymbol{R}$ qui vérifient $y'\in V\Subset V_{k+1}\Subset V_k$ et $0\in I\Subset I_{k+1}\Subset I_k$ pour tout k. On choisit aussi une séquence des cônes ouverts $\{\Gamma_k\}_{k=0}^\infty\cup\{\Gamma\}\subset\boldsymbol{R}^n$ et $\{F_k\}_{k=0}^\infty\cup\{F\}\subset\boldsymbol{R}^{n-1}$ qui vérifient les conditions suivantes.

(C.1) $\eta\in\Gamma\Subset\Gamma_{k+1}\Subset\Gamma_k$ et $\eta'\in F\Subset F_{k+1}\Subset F_k$ pour tout k.

(C.2) $F_{2k}\Subset\tilde\Gamma_{2k+1}$ et $\Gamma_{2k+2}\Subset F^*_{2k+1}$ pour tout k.

Ici, $\tilde\Gamma_j=\{\xi'\in\boldsymbol{R}^{n-1}:(\xi'',0,\xi_n)\in\Gamma_j\}$ et $F_j^*=\{\xi\in\boldsymbol{R}^n:\xi'\in F_j,\xi_{n-1}\in\boldsymbol{R}\}$.

Pour chaque k, on fixe $\psi_k\in Y(V_k,V_{k+1})$, $\chi_k\in(I_k,I_{k+1})$, $\alpha_k\in Z(F_k,F_{k+1})$ et $\gamma_k\in Z(\Gamma_k,\Gamma_{k+1})$.

D'abord, on prouve le lemme suivant.

LEMME 3.5. *Il existe $s>0$ telle que $w_*\in H^{-s}$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.5. Rappelons nous que $w=\lambda(D)u$, $u\in\mathscr{E}'$ et que $\operatorname{supp}\lambda\subset\Sigma_1$. Puisque $\langle\xi_n\rangle\sim\langle\xi\rangle$ dans Σ_1, il existe $s>0$ telle que $\langle D_n\rangle^{-s}w\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Alors, on a $\langle D_n\rangle^{-s}w_*\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Donc, on obtient la conclusion. □

Soit $s>0$ mentionné dans Lemme 3.5. Pour $k=0,1,2,\dots$, on définit Λ_k par $\Lambda_k=\langle D_n\rangle^{-s+k/2}$. On définit alors h_k par

$$h_k=\psi_{2k}\chi_k\Lambda_k\gamma_{2k}(D)w_*.$$

PROPOSITION 3.6. *Pout tout $k = 0, 1, 2, \ldots$, on a $h_k \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$.*

On admet provisoirement Proposition 3.6. Alors, pout tout $\psi(x') \in C_0^\infty(V)$, tout $\chi(x_{n-1}) \in C_0^\infty(I)$, tout $\gamma(\xi) \in S_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^n)$; supp $\gamma \subset \Gamma$ et tout $M > 0$ on a

$$\psi\chi\langle D_n\rangle^M \gamma(D) w_* \in H^\infty.$$

Puisque $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans Γ, on obtient $\rho \notin WFw_*$, qui achève la preuve de Théorème 1.

On prouve Proposition 3.6 par l'induction par rapport à k. Lorsque $k = 0$, on obtient $h_0 \in L^2$ à partir de Lemme 3.5.

On montre que $h_{k+1} \in L^2$ en supposant que $h_k \in L^2$. On définit $T_k \in S_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^{n-1})$ par $T_k v = \alpha_{2k+1}(D')(\psi_{2k+1} v)$. On considère désormais T_k comme l'opérateur dans $\boldsymbol{R}^n$.

LEMME 3.7. $T_k Q h_k \in H^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.7. On définit g_k par $g_k = \chi_k \Lambda_k \gamma_{2k}(D) w_*$. Alors, $h_k = \psi_{2k} g_k$. On montre que $T_k Q g_k \in H^\infty$. Afin de simplifier la notation, on omet momentanément l'indice k. Observons que

$$TQg = I_1 + I_2 + I_3,$$

où $I_1 = \alpha(D')(\psi\chi\Lambda\gamma(D)Qw_*)$, $I_2 = \alpha(D')(\psi\chi[Q, \gamma(D)]\Lambda w_*)$ et $I_3 = \alpha(D')(\psi[Q, \chi]\gamma(D)\Lambda w_*)$. Ici, on a utilisé le fait que $[Q, \Lambda] = 0$.

Puisque $\rho \notin WF(Qw_*)$, on a $I_1 \in H^\infty$.

Quant à I_2, on a $I_2 = E_1 + E_2$, où

$$E_1 = \alpha(D')(\psi\chi[P, \gamma(D)]\Lambda w_*), \quad E_2 = \alpha(D')(\psi\chi[K, \gamma(D)]\Lambda w_*).$$

Puisque $K \in OPS_{1/2,1/2}^1(\boldsymbol{R}^n)$ et $\gamma(D) \in OPS_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^n)$, on a

$$[K, \gamma(D)] = \sum_{|\nu|=1}^{N} K_{(\nu)}\gamma^{(\nu)}(D)/\nu! + R_N,$$

où $R_N \in OPS_{1/2,1/2}^{1-N/2}(\boldsymbol{R}^n)$. Notons que $\gamma^{(\nu)}(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma_{k+1}$. Selon la condition (C.2), Proposition 3.3–(ii) et le fait que $\rho \notin WF(Pw_*)$, on a

$$\alpha(D')(\psi\chi K_{(\nu)}\gamma^{(\nu)}(D)\Lambda w_*) \in H^\infty \quad \text{si } |\nu| \geqq 1.$$

Selon le théorème de Calderón–Vaillancourt, pour lequel on cite Kumano-go [7, page 224], R_N transmet H^τ à $H^{\tau+M}$, où $M = -1 + N/2$. Donc, on obtient $E_2 \in H^\infty$. Par le même argument, on a $E_1 \in H^\infty$. Donc, on obtient $I_2 \in H^\infty$.

Quant à I_3, on a $I_3 = E_3 + E_4$, où

$$E_3 = \alpha(D')(\psi[P,\chi]\gamma(D)\Lambda w_*) \qquad \text{et} \quad E_4 = \alpha(D')(\psi[K,\chi]\gamma(D)\Lambda w_*).$$

Observons que

$$[K,\chi] = \sum_{|\nu|=1}^{N} \chi_{(\nu)} K^{(\nu)}/\nu! + R_N,$$

où $R_N \in OPS^{1-N/2}_{1/2,1/2}(\boldsymbol{R}^n)$. Selon Proposition 3.3–(i) et le fait que $\rho \notin WF(Pw_*)$, on a

$$\psi\chi_{(\nu)}K^{(\nu)}\gamma\Lambda w_* \in H^\infty \quad \text{si } |\nu| \geqq 1.$$

Donc on a $E_4 \in H^\infty$ en tenant compte du théorème de Calderón–Vaillancourt. Par le même argument, on a $E_3 \in H^\infty$. Donc, on obtient $I_3 \in H^\infty$.

Selon (3.7), on a $T_k Q g_k \in H^\infty$. Puisque $h_k = \psi_{2k} g_k$, on a

$$T_k Q h_k = T_k Q g_k + T_k Q(1 - \psi_{2k})\, g_k.$$

Selon la définition de T_k et le fait que $V_{2k+1} \Subset V_k$, on a $T_k Q(1 - \psi_{2k}) g_k \in H^\infty$. Donc, on obtient $T_k Q h_k \in H^\infty$. □

Quant à Lemme 3.7, l'idée provient de Morioka [12, Lemme 2.1].

Pour $\varepsilon \geqq 0$, on définit alors $T_{k,\varepsilon}$ par $T_{k,\varepsilon} = \lambda_\varepsilon(D_n)T_k$, où $\lambda_\varepsilon(\xi_n) = (1 + \varepsilon\xi_n^2)^{-1}$. Notons que $T_k = T_{k,0}$.

LEMME 3.8. *Soit $\varepsilon > 0$. Si on considère $T_{k,\varepsilon}$ comme l'opérateur dans $\boldsymbol{R}^{n-1}$, on a $T_{k,\varepsilon} \in OPS^{-2}_{1,0}$. Par surcroît, $\{T_{k,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ est borné dans $OPS^0_{1,0}$* par rapport à ε.

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.8. Selon la définition de $\{T_{k,\varepsilon}\}$ et le fait que $\langle\xi_n\rangle \sim \langle\xi'\rangle$ dans supp ψ_{2k+1}, on obtient les conclusions. □

LEMME 3.9. *Si on considère $T_{k,\varepsilon}$ comme l'opérateur dans $\boldsymbol{R}^n$, on a $T_{k,\varepsilon}h_k \in H^2(\boldsymbol{R}^n)$ lorsque $\varepsilon > 0$ et $T_{k,0}h_k \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.9. Selon l'hypothèse de l'induction, $h_k \in L^2$. Selon la définition de $T_{k,\varepsilon}$ et le fait que $\langle\xi_n\rangle \sim \langle\xi\rangle$ dans supp γ_{2k}, on obtient les conclusions. □

On définit alors M_ε par $M_\varepsilon = \langle D_n\rangle^{1/2} T_{k,\varepsilon}h_k$. Selon Lemme 3.9, $M_\varepsilon \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ si $\varepsilon > 0$.

LEMME 3.10. *$\{M_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ est borné dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.10. Notons que $\operatorname{supp} \widehat{T_{k,\varepsilon}h_k} \subset \Sigma^*$. Selon Proposition 3.4–(iii) et Lemme 3.9, on a

$$\|M_\varepsilon\|^2 \leqq C_1 \operatorname{Re}(QT_{k,\varepsilon}h_k, T_{k,\varepsilon}h_k) + C_2\|T_{k,\varepsilon}h_k\|^2, \tag{3.8}$$

où C_1, C_2 sont indépendantes de ε. Selon Lemme 3.7, Lemme 3.8 et (3.8), on a

$$\|M_\varepsilon\|^2 \leqq C_1(I_{1,\varepsilon} + I_{2,\varepsilon}) + C_2 I_{3,\varepsilon}, \tag{3.9}$$

où $I_{1,\varepsilon} = \operatorname{Re}(T_{k,\varepsilon}Qh_k, T_{k,\varepsilon}h_k)$, $I_{2,\varepsilon} = \operatorname{Re}([Q, T_{k,\varepsilon}]h_k, T_{k,\varepsilon}h_k)$ et $I_{3,\varepsilon} = \|T_{k,\varepsilon}h_k\|^2$.

Selon Lemme 3.9, $T_k h_k \in L^2$ et on obtient $I_{3,\varepsilon} \leqq \|T_k h_k\|^2$.

Quant à $I_{1,\varepsilon}$, on a $\|I_{1,\varepsilon}\| \leqq \|T_{k,\varepsilon}Qh_k\|\,\|T_{k,\varepsilon}h_k\| \leqq \|T_kQh_k\|\,\|T_kh_k\|$.

Quant à $I_{2,\varepsilon}$, on a

$$I_{2,\varepsilon} = E_{1,\varepsilon} + E_{2,\varepsilon} + E_{3,\varepsilon} + E_{4,\varepsilon}, \tag{3.10}$$

où $E_{1,\varepsilon} = \operatorname{Re}([A, T_{k,\varepsilon}]h_k, T_{k,\varepsilon}h_k)$, $E_{2,\varepsilon} = \operatorname{Re}([x_{n-1}^2 D_n^2, T_{k,\varepsilon}]h_k, T_{k,\varepsilon}h_k)$, $E_{3,\varepsilon} = \operatorname{Re}([K, T_{k,\varepsilon}]h_k, T_{k,\varepsilon}h_k)$ et $E_{4,\varepsilon} = \operatorname{Re}([-D_n, T_{k,\varepsilon}]h_k, T_{k,\varepsilon}h_k)$.

Quant à $E_{1,\varepsilon}$, on a $E_{1,\varepsilon} = (\Psi_\varepsilon h_k, h_k)$, où $\Psi_\varepsilon = (S_\varepsilon + S_\varepsilon^*)/2$ et $S_\varepsilon = T_{k,\varepsilon}^*[A, T_{k,\varepsilon}]$. Puisque la partie principale de a est réelle et $\{T_{k,\varepsilon}\}_{0<\varepsilon<1}$ est borné dans $OPS_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^{n-1})$, $\{\Psi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ est aussi borné dans $OPS_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^{n-1})$. Donc, il existe une constante $C_3 > 0$ qui est indépendante de ε telle que $|E_{1,\varepsilon}| \leqq C_3\|h_k\|^2$. Puisque $h_k \in L^2$, $\{|E_{1,\varepsilon}|\}_{0<\varepsilon<1}$ est borné.

Puisque $[x_{n-1}^2, T_{k,\varepsilon}] = 0$, on a $E_{2,\varepsilon} = \operatorname{Re}([D_n^2, T_{k,\varepsilon}](x_{n-1}^2 h_k),\ T_{k,\varepsilon}(x_{n-1}^2 h_k))$. Puisque $x_{n-1}^2 h_k \in L^2$, $\{|E_{2,\varepsilon}|\}_{0<\varepsilon<1}$ est borné.

Notons que $[K, \lambda_\varepsilon(D_n)\alpha_{2k}(D')] = 0$. Alors, on a

$$E_{3,\varepsilon} = \operatorname{Re}(\lambda_\varepsilon(D_n)\alpha_{2k}(D')[K, \psi_{2k+1}(x')]h_k, T_{k,\varepsilon}h_k).$$

Puisque ψ_{2k+1} est indépendant de x_{n-1}, on a $[K, \psi_{2k+1}] \in OPS_{1/2,1/2}^0(\boldsymbol{R}^n)$ en tenant compte de (3.1). Notons que $\lambda_\varepsilon(\xi_n) \leqq 1$. Selon le théorème de Calderón–Vaillancourt, $\{|E_{3,\varepsilon}|\}_{0<\varepsilon<1}$ est borné.

Par le même argument, on peut savoir que $\{|E_{4,\varepsilon}|\}_{0<\varepsilon<1}$ est borné. Donc, la preuve est terminée. □

Selon Lemme 3.10, il existe $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ et une séquence $\{r(j)\}_{j=1}^\infty$; $\lim_{j\to\infty} r(j) = \infty$ telle que pour tout $\varphi \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ on a $\lim_{j\to\infty}(M_{r(j)}, \varphi) = (f, \varphi)$, car $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ est espace hibertien. Selon la définition, $\lim_{j\to\infty} M_{r(j)} = M_0$ dans $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$. Donc, $M_0 = f$ et on obtient $M_0 \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Puisque $\alpha_{2k+1}(\xi') = 1$ sur F_{2k+1} et $\Gamma_{2k+2} \Subset$

F_{2k+1}^*, on a $\langle D_n\rangle^{1/2}\gamma_{2k+2}(D)(\psi_{2k+1}\chi_k\Lambda_{k+1}\gamma_{2k}(D))w_* \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Donc, on obtient $h_{k+1} \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, qui achève l'induction.

References

[1] L. Boutet de Monvel., Hypoelliptic operators with double characteristic and related pseudo-differential operators, Comm. Pure and Appl. Math. **27** (1974), 585–639.

[2] Fediĭ V. S., On a criterion for hypoellipticity, Math. USSR Sb **14** (1971), 15–45.

[3] Grigis. A., Hypoellipticité et paramétrix pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, Astérisque **34–35** (1976), 183–205.

[4] Hörmander L., The analysis of Linear Partial Differential Operators I, Second Edition, Springer–Verlag, 1983.

[5] Hoshiro T., Hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic and parabolic operators of second order, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 615–632.

[6] Hoshiro T., On hypoellipticity for a certain operator with double characteristic, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 593–603.

[7] Kumano-go H., Pseudo-differental operators, MIT Press (1981).

[8] Kusuoka S.-Stroock D., Applications of the Malliavin calculus, Part II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **32** (1885), 1–76.

[9] Morimoto Y., A criterion for hypoellipticity of second order differential operators, Osaka J. Math **24** (1987), 651–675.

[10] Morimoto Y., Propagation of wave front sets and hypoelliptic operators, Pitman Res. Notes Math Ser. **32** (1992), 212–224.

[11] Morimoto Y.-Morioka T., The positivity of Schrödinger operators and the hypoellipticity of second order degenerate elliptic operators, à apparaitre dans Bull. Sci. Math.

[12] Morioka T., Some remarks on micro-hypoelliptic operators of infinitely degenerate type, Publ. RIMS Kyoto Univ. **28** (1992), 129–138.

[13] Morioka T., Hypoellipticité pour un certain opérateur à caractéristique double, à apparaitre dans Tsukuba. J. Math. **22** (1998).

[14] Sawyer E., A weighted inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 1–28.

[15] Wakabayashi S.-Suzuki M., Microhypoellipticity for a class of pseudodifferential operators with double characteristics, Funkciaj Ekvacioj **36** (1993), 519–556.

Département de Mathématiques
Université d'Osaka, Osaka 560,-
JAPON